ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE – ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=k$ και $\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)=k$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(α, β) ώστε $f'(\xi)=0$.
2. Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο (α, β) και συνεχείς στο [α, β] με $g'(x)\neq 0, \forall x\in$(α, β). Να δείξετε ότι
   a) $g(a)\neq g(\beta)$
   b) υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α, β) ώστε $\dfrac{f(\beta)-f(a)}{g(\beta)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
3. **Έστω f παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε $(x^2-1)(f(x)-x^3)\geq 0, \ \forall x\in R$.
   Να δείξετε ότι:
   a) f(1) = 1 και f(- 1) = - 1
   b) υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f'(\xi)=1$
4. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ. Να δειχθεί ότι η εξίσωση ασυνχ + βσυν2χ + γσυν3χ = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, π).
5. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $α_ν$, $α_{ν-1}$, …, $α_1$, $α_ο$ ισχύει $\dfrac{a_\nu}{\nu+1}+\dfrac{a_{\nu-1}}{\nu}+\dots+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_0}{1}=0$ να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $f(x) = α_ν x^ν + α_{ν-1}x^{ν-1} + … + α_1 x + α_ο$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1). (ο ν θεωρείται φυσικός)
6. Έστω f συνεχής στο [1, 2] και παραγωγίσιμη στο (1, 2) με f(1) = f(2). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈(1, 2) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=(2\xi-3)e^{-f(\xi)}$
7. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β). Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 ∈(α, β) ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{\beta-x_0}$
8. Αν για τους α, β, γ$\in R^*$ ισχύει 3α + 4β + 6γ = 0, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,e^2)$, έτσι ώστε αlnξ + β $\ln^2$ξ + γ$\ln^3$ξ = 0.
9. Έστω 0 < α < β και συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α, β] με f(α) = f(β) = 0. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α, β) ώστε $\xi f'(\xi)=5f(\xi)$.
10. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με f(x) > 0 για κάθε χ∈R και $\dfrac{f(2014)}{f(2013)}=e$. Δείξτε ότι η εξίσωση f΄(x) = f(x) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (2013, 2014).

Σχόλιο [t1]: H(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)]

Σχόλιο [t2]: Θ.R για g(x)=f(x)-x ή ΘΜΤ για f(x)

Σχόλιο [t3]: ΘR

Σχόλιο [t4]: ΘR αφού πρώτα βρείτε μια αρχική…

Σχόλιο [t5]: ΘR

Σχόλιο [t6]: Πολλαπλασιάστε με $ξ^4$

11. ***Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α, β) με $f'(x)g'(x)\neq 0,\ \forall x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι
   a) Οι f, g είναι 1- 1 στο [α, β]
   b) Υπάρχει $k\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(k)}{f(\alpha)-f(k)}+\dfrac{g'(k)}{g(\beta)-g(k)}=1$

Σχόλιο [t7]: Θ.R $h(x)=e^x(f(a)-f(x))(g(b)-g(x))$

12. Έστω f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με α > 0 και $e^{f(\alpha)-f(\beta)}=\dfrac{\beta}{\alpha}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x)+1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

Σχόλιο [t8]: ΘR

13. Έστω η παραγωγίσιμη στο [α, β] συνάρτηση f, όπου 0 <α < β. Αν τα σημεία Α$\left(e^{f(\alpha)},\alpha^{\alpha}\right)$, Β$\left(e^{f(\beta)},\beta^{\beta}\right)$ και Ο(0, 0) είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ έτσι ώστε $f'(\xi)=\ln\xi+1$

Σχόλιο [t9]: ΘR $h(x)=f(x)-x\ln x$

14. **Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο διάστημα [α, β] η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο [α, β] και οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) είναι παράλληλες στη διχοτόμο της 1ης γωνίας των αξόνων. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in$(α, β) ώστε $\left(f'(x_0)\right)^2+f''(x_0)=0$.

Σχόλιο [t10]: ΘR $h(x)=e^{f(x)}f΄(x)$

15. *Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο [α, β] για την οποία ισχύει $e^{-\beta}\left(f'(\alpha)+f(\alpha)\right)=e^{-\alpha}\left(f'(\beta)+f(\beta)\right)$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in$(α, β) ώστε $f''(x_0)+2f'(x_0)+f(x_0)=0$.

Σχόλιο [t11]: ΘR $h(x)=e^x(f΄(x)+f(x))$

16. **Δίνεται συνάρτηση f, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] και ισχύει $e^{\alpha+\beta}f(\gamma)=e^{\beta+\gamma}f(\alpha)=e^{\gamma+\alpha}f(\beta)$ όπου $\gamma\in$(α, β). Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in$(α, β) τέτοιο ώστε f΄΄(x_0) – 2f΄(x_0) + f(x_0) = 0.

Σχόλιο [t12]: 2 ΘR $h(x)=f(x)/e^x$

17. *Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R, τέτοια ώστε η γραφική της παράσταση να τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία Α(α, 0) , Β(β, 0) και Γ(γ, 0) με α < β < γ. Να δειχθεί ότι:
   α) Η συνάρτηση h(x) = f(x)e^{-x} είναι δυο φορές παραγωγισιμη στο R.
   β) Υπάρχει $x_0\in$(α, γ) τέτοιο ώστε f΄΄(x_0) – 2f΄(x_0) + f(x_0) = 0.

18. **Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο διάστημα [α, β] ώστε f(α) = f(β) = 0. να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in$(α, β) ώστε f΄(x_0) = f(x_0)f ΄΄(x_0).

Σχόλιο [t13]: Πολλαπλασιάστε με $e^{-f'(x)}$

19. **Δίνονται οι συναρτήσεις f, g :[α, β]$\to R$ α > 0, για τις οποίες ισχύουν: είναι συνεχείς στο [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α, β), f(α) = f(β) = 0, $f(x)g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in$(α, β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in$(α, β) τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{1}{\xi}$.

Σχόλιο [t14]: ΘR $h(x)=f(x)g(x)/x$

20. Αν η f είναι συνεχής στο [1, 2] και παραγωγίσιμη στο (1, 2) να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in$(1, 2) τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{1}{1-x_0}+\dfrac{1}{2-x_0}$

Σχόλιο [t15]: ΘR $h(x)=e^{f(x)}(x^2-3x+2)$

21. Έστω η παραγωγίσιμη στο [α, β] συνάρτηση f με f(x) > 0 για κάθε $x \in$[α, β] και $\left[f(\alpha)\right]^{\frac{1}{e^{\beta}}} = \left[f(\beta)\right]^{\frac{1}{e^{\alpha}}}$ να δείξετε ότι υπάρχει $\kappa \in$(α, β) έτσι ώστε $f(k)^{f(k)} \cdot e^{f'(k)} = 1$

Σχόλιο [t16]: ΘR $h(x)=e^x \ln f(x)$

22. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f: (0, $+\infty$)$\to$R με $f(x) \neq 0$ για κάθε x>0 και οι μιγαδικοί $z_1 = f(a) + ia$, $z_2 = \dfrac{1}{f(\beta)} - \dfrac{1}{\beta} i$ όπου α, β $\in$(0, $+\infty$) με α < β και $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$. Να δείξετε ότι :
   a) $\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2) = 0$
   b) Η εξίσωση f(x) = xf΄(x) έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β)
   c) Υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ$\in$(α, β) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο ξ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Σχόλιο [t17]: Θ.R g(x)=f(x)/x

23. *Δίνεται f ορισμένη και συνεχής στο [α, β] με 0 < α < β και δυο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β]
   a) Αν f(α) = α και f(β) = β και υπάρχει γ$\in$(α, β) ώστε f(γ) = γ να αποδείξετε ότι υπάρχουν x_1, $x_2 \in$(α, β) τέτοια ώστε $f'(x_1) = \dfrac{f(x_1)}{x_1}$ και $f'(x_2) = \dfrac{f(x_2)}{x_2}$
   b) Αν η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Α(x_1, f(x_1)) και B(x_2, f(x_2)) διέρχεται από την αρχή των αξόνων να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in$(α, β) ώστε $f''(x_0) = 0$

Σχόλιο [t18]: Δυο ΘR αφού πρώτα βρείτε αρχική

24. **Έστω f παραγωγίσιμη στο [0, 1] με συνεχή παράγωγο στο [0, 1] και f(1) = f(0) + $\dfrac{1}{2}$, $f'(0) > 0$. Να δείξετε ότι:
   a) Υπάρχει α$\in$(0, 1) ώστε f΄(α) = α
   b) Υπάρχει β$\in$(0, 1) ώστε f΄(β) = 2β.

Σχόλιο [t19]: ΘR $g(x)=f(x)-x^2/2$

Σχόλιο [t20]: ΘΒ h(x)=f΄(x)-2x

Μοναδική ρίζα –ακριβώς κ ρίζες

25. *Δίνονται οι συναρτήσεις f(x) = x^2 και g(x) = xημx + συνx. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν δυο ακριβώς κοινά σημεία με τετμημένες στα διαστήματα (- π, 0) και (0, π) αντίστοιχα.

Σχόλιο [t21]: Θ.Β. και Θ.R.

26. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $a \leq f(x) \leq \beta$ για κάθε x$\in$[α, β] και $f'(x) \neq 1$ για κάθε x$\in$(α, β). Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ$\in$[α, β] ώστε f(ξ) = ξ.

Σχόλιο [t22]: Συνδυάστε ΘΒ και ΘR

27. a) Αν ο ν είναι άρτιος θετικός ακέραιος και $a \neq 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+a)^{\nu} = x^{\nu} + a^{\nu}$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.
   b) Να λυθεί η εξίσωση $(x+3)^{2012} = (x+1)^{2012} + 16^{503}$

Σχόλιο [t23]: Χ=0 και άτοπο με ΘR

28. *Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) της οποίας η παράγωγος είναι 1 – 1. να δειχθεί ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της f έχει μόνο ένα κοινό σημείο με αυτήν.

Σχόλιο [t24]: ΘΜΤ

29. *Δίνεται συνάρτηση $f:[0,1]\to(0.1)$ συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1) με $|f'(x)|<1$ για κάθε x$\in$(0, 1). Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ$\in$(0, 1) ώστε f(ξ) = ξ.

Σχόλιο [t25]: Θ.Β. και Θ.Μ.Τ.

30. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f: [α, β]$\to$R με $f'(x)\neq 0$ για κάθε χ$\in$(α, β) και οι μιγαδικοί $z_1=e^{a}+if(a)$, $z_2=f(\beta)+ie^{\beta}$.
   a) Αν $a\geq 0$ και η εικόνα του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στο μοναδιαίο κύκλο, να βρείτε τον z_1.
   b) Αν Im(z_1z_2) = 0, να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $\chi_0\in$(α, β) τέτοιο ώστε f(χ_0) = 0
   c) Αν ο μιγαδικός w = z_1z_2 είναι φανταστικός να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ $\in$(α, β) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=f(\xi)$

Σχόλιο [t26]: Άσχετο αν α>0 τότε $e^{2a}>1$ άτοπο

Σχόλιο [t27]: Θ.Β. και 1-1

Σχόλιο [t28]: Θ.R. $g(x)=f(x)/e^{x}$

31. *Δίνεται f συνεχής στο $[0,+\infty)$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\sqrt{x}f'(\sqrt{x})\leq 2x,\ \forall x>0$. Να δείξετε ότι $f(2)-f(0)<4$

Σχόλιο [t29]: ΘΜΤ $g(x)=f(\sqrt{x})$

32. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο [0, 1] με f(0) = 0 και f(1) = 1 και $0\leq f(x)\leq 1$. Δείξτε ότι:
   a) υπάρχει $x\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=1-x_0$
   b) υπάρχουν α, β$\in(0,1)$ με α$\neq$β, ώστε $f'(a)\cdot f'(\beta)=1$

Σχόλιο [t30]: ΘΒ kai ΘΜΤ

33. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και f(-1) = -1, f(1) = 1. Να δειχθεί ότι υπάρχουν – 1 < α < β < 1 ώστε $\dfrac{1}{f'(a)}+\dfrac{1}{f'(\beta)}=2$

. (Υποδειξη: κάντε πρώτα θεώρημα Bolzano)

Σχόλιο [t31]: ΘΒ και ΘΜΤ

34. *Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [2, 3] παραγωγίσιμη στο (2, 3) και $f'(x)\neq 0$ για κάθε χ $\in$(2, 3). Να δείξετε ότι:
   a) $f(2)\neq f(3)$
   b) υπάρχει ξ $\in$(2, 3) τέτοιο ώστε 5f(ξ) = 2f(2) + 3f(3)
   c) υπάρχουν ξ_1, ξ_2 $\in$(2, 3) τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)>0$.

Σχόλιο [t32]: ΘΜΤ

35. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] παραγωγίσιμη στο (α, β) και f(α)=α, f(β) = β. Να δείξετε ότι:
   a) υπάρχουν ξ_1, ξ_2 $\in$(α, β) τέτοια ώστε $2f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=3$
   b) υπάρχει χ_0 $\in$(α, β) τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{2a+\beta}{3}$
   c) Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε x$\in$(α, β) τότε υπάρχουν x_1, $x_2\in$(α, β) ώστε
   $$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{2}{f'(x_2)}=3$$

Σχόλιο [t33]: ΘΜΤ στα [α, χ_0] και [χ_0, β]

36. Έστω η συνάρτηση f:[α, β]$\to$R, η οποία είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και f(α) = 2β, f(β) = 2α .
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 2x έχει μια τουλάχιστον ρίζα

στο (α, β).
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, $\xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$.

37. *Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β). Η ευθεία που συνδέει τα σημεία (α, f(α)) και (β, f(β)) τέμνει τη γραφική παράσταση της f στο σημείο (γ, f(γ)) όπου α < γ< β. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

Σχόλιο [t34]: 2ΘΜΤκαι1ΘR

38. * Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β). Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο (γ, f(γ)) με $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα άλλο σημείο με τετμημένη $\delta \in (\alpha, \beta)$ να δείξετε ότι η παράγωγος f΄ δεν είναι 1 – 1.

Σχόλιο [t35]: ΘΜΤ

39. Έστω μια συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν οι αριθμοί f(2), f(4), f(6) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (2, 6)$ ώστε $f''(x_o) = 0$.

Σχόλιο [t36]: 2ΘΜΤκαι1ΘR

40. Αν για τη συνάρτηση f στο διάστημα [α, β] ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, να δειχθεί ότι υπάρχουν αριθμοί ξ_1, ξ_2 τέτοιοι ώστε $\alpha < \xi_1 < \xi_2 < \beta$ και $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$. (Υπόδειξη: Κάντε ΘΜΤ στα διαστήματα $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ και $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$)

41. *Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] α < β και ισχύει $f^2(\alpha) = 1 + 2\alpha$, $f^2(\beta) = 1 + 2\beta$.

a) Να δείξετε ότι υπάρχει $\rho_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho_1)=\dfrac{2}{f(\alpha)+f(\beta)}$

b) Να δείξετε ότι υπάρχει $\rho_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho_1)f(\rho_2)=1$

Σχόλιο [t37]: α) ΘR ή ΘΜΤ β) ΘΕΤ

42. *Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0, 1] και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν f(0) = 2 και f(1) = 4 δείξτε ότι:
α) Η ευθεία ψ = 3 τέμνει την γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_o \in (0, 1)$.

β) Υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = \dfrac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4}$

γ) Υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία : ψ = 2χ + 2000
(Θέμα πανελληνίων 2000)

Σχόλιο [t38]: Συνδιαστική ΘΒ, ΘΕΤ, ΘΜΤ

43. **Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $\lim_{x\to a^+} f(x)=k$ και $\lim_{x\to \beta^-} f(x)=l$. Αν ισχύει $k-l=3(\beta-a)$, να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f κάθετη στην ευθεία ε: x + 3y – 2 = 0.

Σχόλιο [t39]: Θεωρώ συνάρτηση συνεχή στο [α,β] και ΘΜΤ

44. **Έστω η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο [1, 4]. Αν f(1)=1, f(4)=4 και f(2) > 2 , f(3) < 3, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ$\in(1,4)$ τέτοιο ώστε f''(ξ)=0.

Σχόλιο [t40]: 3ΘΜΤ στα [1,2] [2,3], [3,4] για g(x)=f(x)-x 2ΘΒ για g΄(x) και 1ΘR

45. **Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β), συνεχής στο [α, β] με f(α) = f(β) = 0 και f(γ) < 0 για κάποιο γ $\in$(α, β). Να αποδείξετε ότι:
a) υπάρχουν $\xi_1\in$(α, γ) και $\xi_2\in$(γ, β) τέτοια ώστε: $f'(\xi_1)<0$ και $f'(\xi_2)>0$
b) υπάρχει ξ$\in$(α, β) τέτοιο ώστε: f΄(ξ) = 0.
c) Υπάρχει κ$\in$(α, β) έτσι ώστε f''(κ)>0

46. Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f και 0 < α <γ < β με $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma}$.
Αν f(lnα) = f(lnβ), να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 στο R τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

Σχόλιο [t41]: 2ΘΜΤ [lna,lnγ],[lnγ,lnb]

47. **Έστω $f:R\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με f(0)=0 και
$f(x)-e^{-f(x)}=x-1,\ \forall x\in R$
a) Να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και να βρεθεί η $f''(0)$
b) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις *f* και f' είναι γνησίως αύξουσες
c) Να αποδειχθεί ότι $\frac{x}{2}\le f(x)\le xf'(x),\ \forall x\in R$. Πότε ισχύει η ισότητα;

48. **Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β] με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β). Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί γ$\in$(α, β) και δ$\in$(α, β) έτσι ώστε f(γ)·f(δ)<0, να αποδείξετε ότι:
a) υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x0 = 0 στο διάστημα (α, β)
b) υπάρχουν σημεία ξ_1, ξ_2 $\in$(α, β) τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0\ \kappa\alpha\iota\ f''(\xi_2)>0$
c) Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.(Πανελλήνιες 2003 4^{o} Θ)